Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional

1. **Límites de Banach.** Sea ℓ_∞ el espacio de Banach de las sucesiones acotadas de números reales. Sean $T, S : \ell_\infty \to \ell_\infty$ los operadores que a cada sucesión $x = (x(1), x(2), x(3), \dots)$ en ℓ_∞ hacen corresponder las sucesiones

$$Tx = (0, x(1), x(2), x(3), \dots), \quad S(x) = (x(2), x(3), \dots)$$

Sea $Y = \{x - Tx : x \in \ell_\infty\}$ y u la sucesión constante $(1, 1, 1, \dots)$.

a) Prueba que $\operatorname{dist}(u, Y) = 1$.

Sugerencia. Si $x \in \ell_\infty$, dado $\varepsilon > 0$, tiene que existir algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) - x(n-1) < \varepsilon$.

b) Sea $\varphi \in \ell_\infty^*$ tal que $\varphi(u) = 1 = \|\varphi\|$ y $\ker(\varphi) \supset Y$ (cuya existencia es consecuencia del teorema de Hahn-Banach). Prueba que $\varphi(Tx) = \varphi(x)$. Considera la aplicación $T \circ S$ y deduce que $\varphi(Sx) = \varphi(x)$.

c) Sea $x \in \ell_\infty$ y pongamos $m = \operatorname{ínf}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $M = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Prueba que $m \leqslant \varphi(x) \leqslant M$.

Sugerencia. $\left|\varphi(x) - \dfrac{m+M}{2}\right| = \left|\varphi\left(x - \dfrac{m+M}{2}u\right)\right|$.

d) Aplicando el resultado obtenido en el punto anterior a $S^m(x)$ deduce que para todo $x \in \ell_\infty$ se verifica:

$$\operatorname{lím\,inf}\{x_n\} \leqslant \varphi(x) \leqslant \operatorname{lím\,sup}\{x_n\}$$

e) Sea $x \in \ell_\infty$ una sucesión periódica, es decir, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x(p+n) = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcula $\varphi(x)$.

2. Sea X un espacio métrico completo, $\{F_n\}$ una sucesión de conjuntos cerrados tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Prueba que el conjunto abierto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_n$ es denso en X.

3. Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos. Supongamos que E es completo y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de E en F que converge puntualmente en E a una función f.

   a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$, sea

   $$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E : \forall p \geqslant n,\ \rho(f_n(x), f_p(x)) \leqslant \varepsilon\}$$

   Prueba que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ es un conjunto abierto denso en E.
   Sugerencia. Utiliza el ejercicio anterior y prueba que los $F_{n,\varepsilon}$ son cerrados y su unión cubre E.

   b) Prueba que para todo punto $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ existe un entorno abierto V_0 tal que

   $$\rho(f(x_0), f(x)) \leqslant 3\varepsilon \quad \forall x \in V_0$$

   Sugerencia. Sea $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$. Usa la continuidad de f_n para encontrar un entorno $V_0 \subset \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ tal que

   $$\rho(f_n(x_0), f_n(x)) \leqslant \varepsilon \ \ \forall x \in V_0$$

   c) Prueba que f es continua en todo punto de $\Omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{\frac{1}{n}}$ y que $\overline{\Omega} = E$.

   d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Prueba que su derivada es continua en un conjunto de segunda categoría denso en $\mathbb{R}$.